ASTRONOMISCHE NACHRICHTEN.
Nr. 4076.
Band 170. 20.

Über die Herleitung der Hillschen Lösung für die Mondbewegung unmittelbar aus der Jacobischen Differentialgleichung.

Von Prof. Dr. *A. W. Krassnow.*

1. Es sollen hier die Bezeichnungen unserer Abhandlung in Nr. 3773 der Astr. Nachr. beibehalten werden. Nachdem r, S, μ resp. mit $a x$, $\sqrt{a}\cdot S$, $\mu a^{3/2}$ vertauscht sind, erhalten wir für die Jacobische Differentialgleichung:

$$x^2\left(\frac{dS}{dx}\right)^2+\left(\frac{dS}{d\omega}-\mu x^2\right)^2 = 2x-x^2+3\mu^2x^4\cdot\cos^2\omega \quad (1)$$

Es sei $r = r_0$ $(x = x_0)$, wo $r_0\,(x_0)$ eine unten zu bestimmende Funktion von ω ist, die Gleichung einer Kurve, und wir nehmen anstatt der Veränderlichen r die Veränderliche ε an, so daß

$$r = ax = r_0+a\varepsilon = a(x_0+\varepsilon) \quad (2)$$

sein soll. Dann wird die Gleichung (1):

$$x^2\left(\frac{dS}{d\varepsilon}\right)^2+\left(\frac{dS}{d\omega}-\mu x^2-\frac{dS}{d\varepsilon}\cdot\frac{dx_0}{d\omega}\right)^2 = 2x-x^2+3\mu^2x^4\cos^2\omega\ . \quad (3)$$

Wir suchen ein partielles Integral dieser Gleichung von der Form

$$S = S_0+\varepsilon\cdot S_1+\varepsilon^2\cdot S_2+\cdots \quad (4)$$

wo S_0, S_1, S_2, $\cdots$ Funktionen der Veränderlichen ω sein sollen.

Die Einsetzung der Formeln (4) und (2) in die Gleichung (3) und die darauf folgende Vergleichung der Glieder mit ε^0, ε^1, ε^2, $\cdots$ auf den beiden Seiten geben:

$$x_0^2S_1^2+\left(\frac{dS_0}{d\omega}-S_1\frac{dx_0}{d\omega}-\mu x_0^2\right)^2 = 2x_0-x_0^2+3\mu^2x_0^4\cdot\cos^2\omega \quad (5)$$

$$x_0S_1^2+\left(\frac{dS_0}{d\omega}-S_1\frac{dx_0}{d\omega}-\mu x_0^2\right)\cdot\left(\frac{dS_1}{d\omega}-2\mu x_0\right) = 1-x_0+6\mu^2x_0^3\cdot\cos^2\omega \quad (6)$$

$$\begin{aligned}4x_0^2\cdot S_2^2+2\left(\frac{dS_0}{d\omega}-S_1\frac{dx_0}{d\omega}-\mu x_0^2\right)\cdot\left(\frac{dS_2}{d\omega}-\mu\right)+\left(\frac{dS_1}{d\omega}-2S_2\cdot\frac{dx_0}{d\omega}-2\mu x_0\right)^2+8x_0S_1S_2+S_1^2\\ = -1+18\mu^2x_0^2\cdot\cos^2\omega\end{aligned} \quad (7)$$

wenn wir nur die unbekannte Funktion x_0 aus der Gleichung

$$x_0^2S_1 = \frac{dx_0}{d\omega}\left(\frac{dS_0}{d\omega}-\mu x_0^2-S_1\frac{dx_0}{d\omega}\right) \quad (8)$$

. . . .

bestimmt haben werden.

Die Besonderheit dieser Bestimmung der Funktion $r_0 = ax_0$ besteht darin, daß dabei aus der Gleichung

resp. (6), (7), $\cdots$

welche die Funktion

resp. S_1, S_2, $\cdots$

bestimmt, die Unbekannte

resp. S_2, S_3, $\cdots$

ganz herausfällt, so daß die Bestimmung von drei Funktionen x_0, S_0 und S_1 aus drei Gleichungen (5), (6) und (8) möglich wird.

Die so zu bestimmende Funktion r_0 hat, wie man gleich sehen wird, eine kinematische Bedeutung und eine gewisse astronomische Wichtigkeit: Die Kurve $r = r_0$ ist nämlich die periodische*) Kurve, welche den Namen der Hillschen Variationskurve trägt, und das von uns der Bestimmung zu unterwerfende Integral (4) der Gleichung (3), welches zur Variationsbewegung führt, ist kein reelles, sondern ein komplexes Integral und verbindet diese Bewegung, welche jetzt à part steht, mit der allgemeinen Theorie der Mondbewegung.

2. Die Gleichungen (5), (6) und (7) geben sogleich, gehörig inbezug auf die Unbekannten x_0, S_0 und S_1 aufgelöst:

*) Es ist hier überall die Periodizität inbezug auf 2ω, resp. ω, wenn man die parallaktischen Glieder der Störungsfunktion mit berücksichtigt, gemeint.

$$P\sigma\cdot\frac{d^2}{d\omega^2}\left(\frac{1}{x_0}-1\right)+\left(\frac{1}{x_0}-1\right)=-2\mu\sqrt{R}-6\mu^2x_0{}^2\cdot\cos^2\omega+R\left[\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{x_0}\right)\right]^2-\frac{1}{2x_0}\cdot\frac{dR}{d\omega}\cdot\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{x_0}\right) \qquad (9)$$

$$S_1=-\sqrt{R}\cdot\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{x_0}\right) \qquad (10)$$

$$\frac{dS_0}{d\omega}=\frac{1}{\sigma}\sqrt{R}+\mu x_0{}^2 \qquad (11)$$

wo man gesetzt hat:

$$\left.\begin{aligned}P&=2-x_0+3\mu^2x_0{}^3\cdot\cos^2\omega=Q_0:x_0\\ \sigma&=\left[1+\left(\frac{1}{x_0}\frac{dx_0}{d\omega}\right)^2\right]^{-1}\quad\text{und}\quad R=\sigma\cdot Q_0\,.\end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Das System der Gleichungen (9)–(11) hat zwei Lösungen, je nachdem man die Wurzel $\sqrt{R}$ mit dem Zeichen (+) oder (—) annimmt: Das erste Zeichen gibt die periodische Bahn der direkten Bewegung, das zweite Zeichen gibt die periodische Bahn der retrograden Bewegung.

Zur Lösung der Gleichung (9) bedient man sich der Methode der sukzessiven Annäherungen: wählt man für x_0 einen Ausgangswert (zum Beispiel $1+2\mu$ für die direkte und $1-2\mu$ für die retrograde Bewegung) und berechnet man mit diesem Werte den Koeffizienten $P\cdot\sigma$ wie auch die rechte Seite der Gleichung (9), so erhält man zur Bestimmung von x_0 in der zweiten Annäherung eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung inbezug auf $\left(\frac{1}{x_0}-1\right)$ mit periodischen Koeffizienten; sucht man jetzt das einzige periodische Integral dieser Gleichung, so hat man einen neuen Wert von x_0, womit man sich die Möglichkeit schafft, mit diesem Werte den Koeffizienten $P\sigma$ wie auch die rechte Seite der Gleichung (9) zu verbessern etc.

3. Die periodische Lösung x_0 der Gleichung (9) ist so beschaffen, daß die Kurve $r=r_0$ ($\varepsilon=0$) die Hillsche Variationskurve ist.

In der Tat, die intermediären Integrale von Jacobi sind:

$$a^{3/2}\cdot\frac{d(x_0+\varepsilon)}{dt}=S_1+2\varepsilon S_2+\cdots$$

$$a^{3/2}\cdot(x_0+\varepsilon)^2\cdot\frac{d\omega}{dt}=\frac{dS_0}{d\omega}+\varepsilon\frac{dS_1}{d\omega}+\cdots-\mu(x_0+\varepsilon)^2-\frac{dx_0}{d\omega}(S_1+2\varepsilon S_2+\cdots)\,.$$

Die Differentialgleichung der geometrischen Bahn ist somit nach der Elimination der Zeit t:

$$\frac{1}{(x_0+\varepsilon)}\cdot\frac{d(x_0+\varepsilon)}{d\omega}=\left[S_1+2\varepsilon\cdot S_2+\cdots\right]:\left[\frac{dS_0}{d\omega}+\varepsilon\frac{dS_1}{d\omega}+\cdots-\mu(x_0+\varepsilon)^2-\frac{dx_0}{d\omega}(S_1+2\varepsilon\cdot S_2+\cdots)\right].$$

Wie man unmittelbar sieht, hat die letzte Gleichung die evidente Lösung $\varepsilon=0$, dann gibt die Einsetzung $\varepsilon=0$ dieser Gleichung die Form (8).

Es ist demnach:

1) Die Kurve $r=r_0$ ($\varepsilon=0$) genügt den Differentialgleichungen der Bewegung mit einem im voraus gegebenen Werte der Konstante a;

2) Diese Kurve ist, wie man oben gesagt hat, eine periodische Kurve.

Andererseits weiß man aber, daß:

1) bei einem im voraus gegebenen Werte von a nur eine einzige periodische (in bezug auf 2ω resp. ω) Lösung der Bewegung existiert;

2) diese periodische Bewegung in der Hillschen Variationskurve stattfindet.

Also: Die Kurve $r=r_0$ ($\varepsilon=0$) ist die Hillsche Variationskurve.

4. Das mit Hilfe der Kurve $r=r_0$ erhaltene Integral (4) der Gleichung (3) ist kein reelles, sondern ein komplexes Integral der Jacobischen Differentialgleichung.

In der Tat, die Gleichung (7) hat die Form:

$$4S_2{}^2+2\frac{dS_2}{d\omega}=-1\,^{*)}$$

wenn wir diese Gleichung, was für unsern jetzigen Zweck ganz ausreicht, bis auf ihre in bezug auf μ endlichen Glieder beschränken.

Eine solche Gleichung hat unter ihren Integralen nur ein einziges (singuläres) Integral $\pm\,^1/_2\sqrt{-1}$, welches stets endlich bleibt (und dem periodischen Integral der vollständigen Gleichung entspricht).

Es sind also alle Koeffizienten $S_2, S_3, S_4, \cdots$ in (4) im allgemeinen komplex.

Aus diesem Grunde dürfen wir anstatt (4) schreiben:

$$S=S_0+\varepsilon S_1+\varepsilon^2[A\pm\sqrt{-1}\cdot B]$$

wo A und B reelle trigonometrische Funktionen von 2ω (resp. ω), nach steigenden Potenzen von ε aufgelöst, sind, und den Jacobischen intermediären Integralen die Form geben

$$a^{3/2}\cdot\frac{d(x_0+\varepsilon)}{dt}=S_1+2\varepsilon[A\pm\sqrt{-1}\cdot B]+\varepsilon^2\cdot\frac{d}{d\varepsilon}[A\pm\sqrt{-1}\cdot B]$$

*) Das Zeichen (—) der rechten Seite entsteht dadurch, daß die Funktion $Q=2r-\frac{r^2}{a}+3\mu^2r^4\cos^2\omega$, welche das Produkt der Potentialfunktion mit dem Quadrat des Radiusvektors bildet, im Gebiete der möglichen Bewegung ein Maximum besitzt.

$$a^{3/2}\cdot(x_0+\varepsilon)^2\cdot\frac{d\omega}{dt} = \frac{dS_0}{d\omega}+\varepsilon\frac{dS_1}{d\omega}+\varepsilon^2\left[\frac{dA}{d\omega}\pm\sqrt{-1}\cdot\frac{dB}{d\omega}\right]-\mu\cdot(x_0+\varepsilon)^2$$
$$-\frac{dx_0}{d\omega}\left(S_1+2\varepsilon\left[A\pm\sqrt{-1}\cdot B\right]+\varepsilon^2\cdot\frac{d}{d\varepsilon}\left[A\pm\sqrt{-1}\cdot B\right]\right).$$

Die Gleichungen lassen nur ein einziges System von reellen Lösungen zu, nämlich:

$$\varepsilon = 0 \left\{\begin{aligned} a^{3/2}\cdot\frac{dx_0}{dt} &= S_1 \\ a^{3/2}\cdot x_0^2\cdot\frac{d\omega}{dt} &= \frac{dS_0}{d\omega}-\mu x_0^2 - S_1\frac{dx_0}{d\omega}\end{aligned}\right\} \text{siehe die Gleichung (8)}$$

Die Bahn $r = r_0$ kennzeichnet sich also durch die Beschaffenheit, daß sie aus ihren intermediären Integralen ohne weitere Integration, durch bloßes Zerfallen der Integrale in die reellen und imaginären Teile, hervorgeht: eine Integrationskonstante verschwindet dadurch so gut wie ganz, und nur zwei Integrationsparameter charakterisieren die Bewegung in der Hillschen Variationskurve.

5. Indem wir die vollständige Bestimmung dieses komplexen Integrals (4), d. h. aller Funktionen S_2, S_3, S_4, $\cdots$ auf eine spätere Zeit verschieben, haben wir jetzt die Absicht, mit der Bestimmung der Funktionen x_0, S_0 und S_1 aus den Gleichungen (5), (6) und (8) für die direkte Bewegung uns zu beschäftigen. Diese Bestimmung wird numerisch sein.

Es sei:

1) das Produkt der Gaußischen Konstante mit der Summe der Erd- und Mondmasse gleich 1;

2) die mittlere siderische geozentrische Mondbewegung gleich 1.

Dann ist nach Dr. G. W. Hill (Amer. Journal of Math., t. 1, p. 146):

$$\frac{1}{a} = 1.1555243\,; \qquad \mu = 0.0602200$$

und, wenn unsere Rechnungen logarithmisch und siebenstellig geführt werden, sind die endgiltigen Werte:

ω	$P\cdot\sigma$	R	$2\mu\sqrt{R}$	$6\mu^2 x_0^2\cdot\cos^2\omega$	$R\left[\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{x_0}\right)\right]^2$
0°	0.8701882	0.9974047	0.1202836	0.0285857	0.0000000
15	0.8680106	0.9958463	0.1201896	0.0267212	0.0000375
30	0.8620404	0.9915593	0.1199307	0.0215912	0.0001133
45	0.8538312	0.9856286	0.1195714	0.0144973	0.0001525
60	0.8455608	0.9796116	0.1192059	0.0073011	0.0001154
75	0.8394667	0.9751504	0.1189342	0.0019668	0.0000387
90	0.8372273	0.9735050	0.1188338	0.0000000	0.0000000

ω	$\frac{1}{2x_0}\cdot\frac{dR}{d\omega}\cdot\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{x_0}\right)$	σ	Die rechte Seite der Gleichung (9)
0°	0.0000000	1.0000000	−0.1488693
15	0.0000312	0.9999502	−0.1469045
30	0.0000948	0.9998489	−0.1415034
45	0.0001287	0.9997940	−0.1340449
60	0.0000984	0.9998418	−0.1264900
75	0.0000332	0.9999466	−0.1208955
90	0.0000000	1.0000000	−0.1188338

oder funktional:

$$\begin{aligned} P\cdot\sigma = {} & 0.8537696 \\ & +0.0164800\cdot\cos 2\omega \\ & -0.0000618\cdot\cos 4\omega \\ & +0.0000003\cdot\cos 6\omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R = {} & 0.9855418 \\ & +0.0119490\cdot\cos 2\omega \\ & -0.0000870\cdot\cos 4\omega \\ & +0.0000007\cdot\cos 6\omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\mu\sqrt{R} = {} & 0.1195651 \\ & +0.0007248\cdot\cos 2\omega \\ & -0.0000064\cdot\cos 4\omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6\mu^2 x_0^2\cos^2\omega = {} & 0.0143951 \\ & +0.0142919\cdot\cos 2\omega \\ & -0.0001022\cdot\cos 4\omega \\ & +0.0000009\cdot\cos 6\omega \end{aligned}$$

$$R\left[\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{x_0}\right)\right]^2 = 2\sin^2 2\omega\,[0.0000762 - 0.0000014\cdot\cos 2\omega]$$

$$\frac{1}{2x_0}\frac{dR}{d\omega}\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{x_0}\right) = 2\sin^2 2\omega\,[0.0000644 - 0.0000024\cdot\cos 2\omega]$$

$$1-\sigma = 2\sin^2 2\omega\,[0.0001030 - 0.0000023\cdot\cos 2\omega]$$

Die rechte Seite der Gleichung (9) $= -0.1339483$
$-0.0150163\cdot\cos 2\omega$
$+0.0000967\cdot\cos 4\omega$
$-0.0000014\cdot\cos 6\omega$

Die Gleichung (9) ist also endgiltig:

$$\left|\begin{array}{l}+0.8537696\\+0.0164800\cdot\cos 2\omega\\-0.0000618\cdot\cos 4\omega\\+0.0000003\cdot\cos 6\omega\end{array}\right|\cdot\frac{d^2}{d\omega^2}\left(\frac{1}{x_0}-1\right)+\left(\frac{1}{x_0}-1\right) = \left|\begin{array}{l}-0.1339483\\-0.0150163\cdot\cos 2\omega\\+0.0000967\,.\cos 4\omega\\-0.0000014\cdot\cos 6\omega\end{array}\right|$$

Das periodische Integral dieser Gleichung ist:

$$\frac{1}{x_0} = \begin{array}{l}0.8662567\\+0.0062193\cdot\cos 2\omega\\-0.0000238\cdot\cos 4\omega\\+0.0000002\cdot\cos 6\omega\end{array}$$

Daher ist die Bahn der periodischen Lösung:

$$\frac{1}{r_0} = \begin{array}{l}1.0009807\\+0.0071866\cdot\cos 2\omega\\-0.0000275\cdot\cos 4\omega\\+0.0000002\cdot\cos 6\omega\end{array} \tag{13}$$

Aus den Gleichungen (10) und (11) hat man weiter mit Benutzung dieses Integrals:

ω	S_1	$\frac{dS_0}{d\omega}$
0°	0.0000000	1.0778163
15	0.0061249	1.0772346
30	0.0106443	1.0755964
45	0.0123480	1.0732388
60	0.0107438	1.0707375
75	0.0062243	1.0688098
90	0.0000000	1.0680835

oder funktional:

$$S_1 = \begin{array}{l}0.0123484\cdot\sin 2\omega\\-0.0000574\cdot\sin 4\omega\\+0.0000004\cdot\sin 6\omega\end{array} \tag{14}$$

$$\frac{dS_0}{d\omega} = \begin{array}{l}1.0730945\\+0.0048640\cdot\cos 2\omega\\-0.0001445\cdot\cos 4\omega\\+0.0000025\cdot\cos 6\omega\\-0.0000002\cdot\cos 8\omega\end{array}$$

so daß:

$$S_0 = \begin{array}{l}1.0730945\cdot\omega\\+0.0024320\cdot\sin 2\omega\\-0.0000361\cdot\sin 4\omega\\+0.0000004\cdot\sin 6\omega\end{array} \tag{15}$$

Das Gesetz der Bewegung in der periodischen Bahn (13) läßt sich aus dem zweiten intermediären Jacobischen Integral (s. § 4) d. h. aus

$$a^{3/2}\cdot\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{x_0{}^2}\sqrt{R}$$

bestimmen. Demgemäß erhält man:

ω	$\frac{1}{a^{3/2}}\cdot\frac{dt}{d\omega}$	$\frac{dt}{d\omega}$
0°	1.3154700	1.0590400
15	1.3189812	1.0618670
30	1.3286881	1.0696815
45	1.3422278	1.0805818
60	1.3560984	1.0917487
75	1.3664710	1.1000992
90	1.3703152	1.1031942

oder funktional:

$$\frac{1}{a^{3/2}}\cdot\frac{dt}{d\omega} = \begin{array}{l}1.3425599\\-0.0274184\cdot\cos 2\omega\\+0.0003325\cdot\cos 4\omega\\-0.0000041\cdot\cos 6\omega\\+0.0000003\cdot\cos 8\omega\end{array}$$

$$\frac{dt}{d\omega} = \begin{array}{l}1.0808492\\-0.0220736\cdot\cos 2\omega\\+0.0002678\cdot\cos 4\omega\\-0.0000033\cdot\cos 6\omega\\+0.0000002\cdot\cos 8\omega\end{array}$$

woraus

$$\omega-\tau = \begin{array}{l}+0.0102112\cdot\sin 2\omega\\-0.0000619\cdot\sin 4\omega\\+0.0000005\cdot\sin 6\omega\end{array} \tag{16}$$

wo gesetzt ist:

$$\tau = (t-t_0):(1.0808492) = (t-t_0):(1.3425599\cdot a^{3/2}) \tag{17}$$

und die Integrationskonstante t_0 der Moment eines beliebigen Neumondes ist. Von diesem Neumond ab hat man die Elongationen ω zu zählen.

6. In diesem Paragraphen geben wir die Kontrollen unserer obigen Rechnungen an.

Die innere Kontrolle. Am Anfang des vorigen Paragraphen haben wir die mittlere siderische geozentrische Mondbewegung als eins angenommen; wir müssen jetzt aus der Formel (16) diesen Wert von neuem, schon a posteriori, herleiten. Und wirklich zeigen die Formeln (16) und (17), daß die mittlere synodische geozentrische Mondbewegung bei uns ist:

$$\frac{1}{1.3425599\cdot a^{3/2}} = \frac{1}{1.0808492} = 0.9251985$$

und daß folglich die mittlere siderische geozentrische Mondbewegung ist:

$$0.9251985 + 0.0748013 = 0.9999998$$

d. h. daß die Unkongruenz unserer Rechnungen, von Abrundungen herrührend, nur zwei Einheiten der siebenten Dezimale beträgt.

Vergleichungen mit Dr. G. W. Hill. Unsere Formeln (13) und (16) haben eine von denen Dr. G. W. Hills verschiedene Form. Um die Reduktion der einen Form auf die andere zu vermeiden, treten wir folgenden Umweg an, welcher dem Leser ohne Erklärungen verständlich ist.

Nachdem die Formeln von Dr. G. W. Hill auf p. 147 des Amer. Journ. of Math., t. 1, bis auf die siebente Dezimale vorläufig abgerundet sind, erhält man:

Nach Dr. G. W. Hill:

τ	$\frac{r}{a_0}\cos(\omega-\tau)$	$\frac{r}{a_0}\sin(\omega-\tau)$	$\omega-\tau$	$\frac{1}{r}$
0°	0.9928260	0.0000000	0′ 0″.00	1.0081401
15	0.9937849	0.0051107	17 40.74	1.0071541
30	0.9964069	0.0088483	30 31.63	1.0044775
45	0.9999940	0.0102114	35 6.19	1.0008615
60	1.0035870	0.0088384	30 16.49	0.9972914
75	1.0062211	0.0051008	17 25.60	0.9947066
90	1.0071860	0.0000000	0 0.00	0.9937664

und darauf nach den Formeln (13) und (16) für die unten gegebenen Werte von ω:

Nach den Formeln (13) und (16):

ω	$\frac{1}{r_0}$	$\omega-\tau$
0° 0′ 0″.00	1.0081400	0′ 0″.00
15 17 40.72	1.0071539	17 40.72
30 30 31.63	1.0044777	30 31.63
45 35 6.19	1.0008614	35 6.19
60 30 16.49	0.9972914	30 16.49
75 17 25.60	0.9947066	17·25.60
90 0 0.00	0.9937664	0 0.00

Man hat also für dieselben Werte von ω die Differenzen:

A. Krassnow — G. W. Hill:

in $\frac{1}{r_0}$		in $(\omega-\tau)$
−1	siebente Dezimale der Zahlen	0″.00
−2		−0.02
+2		0.00
−1		0.00
0		0.00
0		0.00
0		0.00

Es geben also unsere Formeln die Hillschen Werte in den Grenzen der bedungenen Genauigkeit vollständig wieder.

7. Das in der vorstehenden Abhandlung auseinandergesetzte enthält den Beweis unserer Thesen des zweiten Teiles der Seite 72 der Astr. Nachr. Nr. 3773, und die daselbst angezeigte Methode, das Jacobische Integral zu finden, welches der Hillschen Lösung entspricht, unterscheidet sich von der hier entwickelten nur in der Form. Im Einklang mit dem daselbst ferner gesagten, beabsichtigen wir, später zu zeigen, daß die Hillsche Lösung keineswegs à part steht, sondern sich in einer sehr intimen Relation mit der allgemeinen Theorie befindet, nämlich daß die Kenntnis des von uns hier der Bestimmung unterworfenen partiellen komplexen Integrals ohne weiteres die Möglichkeit bietet, die Einhüllenden (die singulären Auflösungen) der allgemeinen Bahnen (von mäßigen Exzentrizitäten) zu finden, was für die Auflösung der Jacobischen Gleichung notwendig ist.

Warschau, k. Universitätssternwarte, 1905 Okt. 30.

Prof. Dr. *A. W. Krassnow.*

Twenty-five new variable stars.

(Harvard College Observatory Circular No. 107).

A recent examination, by Miss *Henrietta S. Leavitt*, of plates taken with the 24 inch Bruce Telescope, has led to the discovery of a number of new variable stars, which are given in Table I. The six variables in Orion were discovered during the selection of comparison stars for the pair of interesting variables, H. 797 and H. 798, near σ Orionis. The discovery of the three variables in Virgo was made by superposing plates in the manner described in Circular 79 (A. N. 3963). Six excellent plates, having exposures of about two hours, were used. The approximate centres of these plates are RA. = $13^h 54^m$, Decl. = −10°.4 (1900). The known variable, RR Virginis, was rediscovered at the same time. The sixteen variables in Cygnus*) are in the region of the great spiral nebula, whose most conspicuous portions are catalogued as NGC. 6960 and NGC. 6992. Together with the known variable UX Cygni, they were found by

*) Der letzte liegt schon in Pegasus. *Kr.*